(0,1)–ПОРЯДКИ И ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Цюпий Т.И.

Национальный университет биоресурсов и природопользования,

Украина, Киев

В последнее время бурно развивается теория представлений конечномерных алгебр. Разработанные в этой теории мощ онструктивные методы все больше используются в других областях математики, в частности, в теории представле зличных алгебраических структур, в теории колец. В данной работе исследуется строение (0,1)-порядков и их колчано омощью частично упорядоченных множеств. Используются методы теории колчанов и теории колец и модулей. Важ собенностью работы является использование методов компьютерной алгебры.

Пусть $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ – черепичный порядок над дискретно нормированным кольцом ϑ с матрицей показателей $\varepsilon(\Lambda) = ($

де α_{ij} – целые и $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ для всех i, j, k (эти соотношения называются кольцевыми неравенствами), $\alpha_{ii} = 0$ для всех i [

Отметим, что при изучении порядков достаточно рассматривать только приведенные порядки, для матриц показате оторых $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всех $i \neq j$. Поэтому будем предполагать, что порядок Λ – приведенный.

Черепичный порядок $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ называется (0,1)-порядком, если матрица показателей $\varepsilon(\Lambda)$ является (0,1)-матрицей.

Каждому такому (0,1)-порядку Λ поставим в соответствие частично упорядоченное множество $S(\Lambda)$ из n элеме $(\Lambda) = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$, которое определяется следующим образом: $a_i \leq a_j \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0$.

Наоборот, если есть конечное частично упорядоченное множество $S = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ и дискретно нормированное кольц о можно построить (0,1)-порядок $\Lambda = \{\vartheta, \varepsilon(\Lambda)\}$ по правилу

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } a_i \le a_j, \\ 1 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Приведем определение ширины частично упорядоченного множества. *Шириной* частично упорядоченного множеств зывается максимально возможное число элементов подмножества множества S, которое состоит из попарно несравни ементов, если это число конечное. Обозначение ширины $S - w(S)$.

Теорема 1. Пусть Λ – приведенный (0,1)-порядок. Тогда с точностью до эквивалентности его матрица показателей им д:

$$\varepsilon(\Lambda) = \begin{pmatrix} H_{n_1} & R_{12} & \cdots & R_{1t} \\ R_{21} & H_{n_2} & \cdots & R_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{t1} & R_{t2} & \cdots & H_{n_t} \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \qquad H_{n_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n_i},$$

$= w(S(\Lambda))$ – ширина соответствующего частично упорядоченного множества $S(\Lambda)$, R_{kl} $, k,l = \overline{1,t}$, $k \neq l$, – (0,1)-матр змерности $n_k \times n_l$ такие, что произвольный элемент β_{ij} матрицы R_{kl} и элемент γ_{ji} матрицы R_{lk} удовлетворяют усло $_j + \gamma_{ji} > 0$.

При доказательстве теоремы 1 используется теорема Дилуорса [2].

Теорема (Дилуорса). Минимальное число непересекающихся цепей, которые в совокупности содержат все элеме астично упорядоченного множества S, равно максимально возможному числу элементов подмножества множеств оторое состоит из попарно несравнимых элементов, если это число конечное.

Пусть $Q(\Lambda)$ – колчан Габриеля порядка Λ [1]. Известно, что колчан приведенного черепичного порядка над дискре ормированным кольцом является сильно связным колчаном без кратных стрелок.

Напомним, что колчан называется сильно связным, если существует путь между каждыми двумя его вершинами. Кр ого, одна вершина без стрелок также считается сильно связным колчаном.

Приведем определение диаграммы конечного частично упорядоченного множества.

Пусть $S=\{a_1,a_2,\dots a_n\}$ – конечное частично упорядоченное множество с отношением порядка $\leq$. *Диаграмма* S – это кол $Q(S)$ с множеством вершин $VQ(S)=\{1,2,\dots n\}$ и множеством стрелок $AQ(S)=\{\sigma\}$ таким, что в $AQ(S)$ есть стрелка $\sigma: i \to j$ (i огда и только тогда, когда $a_i \leq a_j$ и не существует элемента $a_k \in S$ такого, что $a_i \leq a_k \leq a_j$, где $a_k \neq a_i$, $a_k \neq a_j$.

Заметим, что колчан $Q(S)$ не имеет ориентированных циклов, в частности петель, т.е. $Q(S)$ – ацикличный колчан ратных стрелок. Стрелка $\sigma: i \to j$ ациклического колчана Q называется лишней, если существует путь из вершины ершину j длины большей, чем 1.

Предложение. Пусть Q – ациклический колчан без кратных и лишних стрелок. Тогда Q является диаграммой конеч астично упорядоченного множества S.

Наоборот, диаграмма $Q(S)$ конечного частично упорядоченного множества S является ациклическим колчаном ратных и лишних стрелок.

Укажем конструкцию, которая позволяет по диаграмме $Q(S)$ произвольного конечного частично упорядоченн ножества $S=\{a_1,a_2,\dots a_n\}$ строить сильно связный колчан без кратных стрелок.

Обозначим через $S_{\max}$ множество всех максимальных элементов частично упорядоченного множества S, через S_{n} ножество всех минимальных элементов S, через $S_{\max}\times S_{\min}$ – их декартово произведение, а через $\widetilde{Q}(S)$ – колчан, кото олучается из диаграммы $Q(S)$ присоединением стрелок σ_{ij} для всех $(a_i,a_j)\in S_{\max}\times S_{\min}$.

Понятно, что $\widetilde{Q}(S)$ является сильно связным колчаном без кратных стрелок.

Черепичный (0,1)-порядок, который соответствует частично упорядоченному множеству S, будем обозначать $\Lambda(S)$.

Теорема 2. Колчан $Q(\Lambda(S))$ совпадает с колчаном $\widetilde{Q}(S)$.

Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы в теории представлени овременной структурной теории колец.

ЛИТЕРАТУРА

. Цюпий Т.И. Колчаны и индексы полумаксимальных колец // Известия Гомельского государственного университет 2001. – в.3(6). – С.114-123.

. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424с.