Методы идентификации распределенных параметров на основе метода наименьших квадратов и ортогональных функций

Литовченко О.В.

Институт прикладной математики и механики,

г. Донецк

Задача идентификации распределенного параметра относится к обратным задачам и является некорректной в классическом смысле.

К настоящему времени наиболее популярным методом решения подобного класса задач является метод регуляризации Тихонова.

Была поставлена задача найти менее трудоемкий более конкретный метод идентификации, в качестве стабилизирующего фактора в котором используется метод наименьших квадратов.

Сформулируем 2 обратных задачи идентифицации распределенных во времени параметров конвективного и лучистого теплообмена для одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода.

Математическая модель процесса нагрева выглядит следующим образом

$$\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(\tau,x)}{\partial x^2}, \quad o \le x \le l$$

граничные условия третьего рода для задачи 1

$$-\lambda \left.\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_в\left[T_{гр.} - T(\tau,o)\right], \qquad \lambda \left.\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\right|_{x=l} = \alpha_н\left[T_{гр.} - T(\tau,l)\right]$$

граничные условия третьего рода для задачи 2

$$-\lambda \left.\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \sigma_в\left[T^4_{гр.} - T^4(\tau,o)\right] \qquad \lambda \left.\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\right|_{x=l} = \sigma_н\left[T^4{}_{гр.} - T^4(\tau,l)\right]$$

и начальным условием

$$T(0,x) = t_0(x)$$

Где $T(\tau,x)$ - температура тела, $T_{гр.}$ - температура греющей среды, λ - коэффициент теплопроводности среды, $\alpha_в, \alpha_н$ - коэффициенты конвективной теплоотдачи сверху и снизу, $\sigma_в, \sigma_н$ - коэффициенты лучистой теплоотдачи сверху и снизу.

Предположим известна температура тела на границе с внешней средой в r моментах времени:

$$T(\tau_k, 0) = f_k, k = \overline{1, r}$$

Ставятся задачи нахождения $\alpha = \alpha(\tau)$ и $\sigma = \sigma(\tau)$ как функций зависящих от времени в виде линейной комбинации ортогональных функций

$$\alpha(\tau) = \sum_{i=1}^{p} a_i K_i(\tau),$$

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{p} b_i K_i(\tau),$$

Где K_i - некоторая система ортогональных функций.

Минимизация квадратичного функционала невязки уравнения граничного условия третьего рода, содержащего искомый параметр, повышает устойчивость к ошибкам во входных данных.

Для упрощения нагрев считаем симметричным. Решив задачу Дирихле и использовав разности вперед для аппроксимации производной по координате имеем систему уравнений граничных условий в r моментах времени

$$\frac{\lambda}{\Delta x}(T(\tau_k, x_1) - T(\tau_k, x_0)) = \alpha_к[T_{гр} - T(\tau_k, x_0)],$$

$$\frac{\lambda}{\Delta x}(T(\tau_k, x_1) - T(\tau_k, x_0)) = \sigma_к[T^4{}_{гр} - T^4(\tau_k, x_0)],$$

где α_k и σ_k это значение параметра в момент времени k

и $$\sigma_k = \sum_{i=1}^{p} b_i K_i(\tau_k), \qquad \alpha_k = \sum_{i=1}^{p} a_i K_i(\tau_k).$$

Представим системы граничных условий в матричной форме

$$\frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot \left(T_{gr} - T(\tau_1, x_0)\right) \\ \alpha_2 \cdot \left(T_{gr} - T(\tau_2, x_0)\right) \\ \vdots \\ \alpha_r \cdot \left(T_{gr} - T(\tau_r, x_0)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{gr} - T(\tau_1, x_0) \\ T_{gr} - T(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T_{gr} - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot \left({T_{gr}}^4 - T^4(\tau_1, x_0)\right) \\ \sigma_2 \cdot \left({T_{gr}}^4 - T^4(\tau_2, x_0)\right) \\ \vdots \\ \sigma_r \cdot \left({T_{gr}}^4 - T^4(\tau_r, x_0)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {T_{gr}}^4 - T^4(\tau_1, x_0) \\ {T_{gr}}^4 - T^4(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ {T_{gr}}^4 - T^4(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}.$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} = \mathrm{a}_0 \cdot \begin{pmatrix} K_0(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_0(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_0(\tau_r) \end{pmatrix} + \mathrm{a}_1 \cdot \begin{pmatrix} K_1(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_1(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_1(\tau_r) \end{pmatrix} +$$

$$+ \cdots + \mathrm{a}_n \cdot \begin{pmatrix} K_n(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_n(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n(\tau_r) \end{pmatrix}.$$

и

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix} = \mathrm{b}_0 \cdot \begin{pmatrix} K_0(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_0(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_0(\tau_r) \end{pmatrix} + \mathrm{b}_1 \cdot \begin{pmatrix} K_1(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_1(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_1(\tau_r) \end{pmatrix} +$$

$$+ \cdots + \mathrm{b}_n \cdot \begin{pmatrix} K_n(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_n(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n(\tau_r) \end{pmatrix}.$$

Для удобства записи преобразований введем такие обозначения

$$\widehat{K_0} = \begin{pmatrix} K_0(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_0(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_0(\tau_r) \end{pmatrix}, \ \widetilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{P} = \frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} \mathrm{T}(\tau_1, x_1) - \mathrm{T}(\tau_1, x_0) \\ \mathrm{T}(\tau_2, x_1) - \mathrm{T}(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ \mathrm{T}(\tau_r, x_1) - \mathrm{T}(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} {\mathrm{T}_{gr}}^4 - \mathrm{T}^4(\tau_1, x_0) \\ {\mathrm{T}_{gr}}^4 - \mathrm{T}^4(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ {\mathrm{T}_{gr}}^4 - \mathrm{T}^4(\tau_r, x_0) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{K_n} = \begin{pmatrix} K_n(\tau_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_n(\tau_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_n(\tau_r) \end{pmatrix}, \ \mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_{gr} - \mathrm{T}(\tau_1, x_0) \\ \mathrm{T}_{gr} - \mathrm{T}(\tau_2, x_0) \\ \vdots \\ \mathrm{T}_{gr} - \mathrm{T}(\tau_r, x_0) \end{pmatrix},$$

Для нахождения функций методом МНК вводятся квадратичные функционалы

$$S(\alpha)=\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{\Delta x}\big(T(\tau_k,x_1)-T(\tau_k,x_0)\big)-\sum_{i=1}^{p}a_iK_i(\tau_k)\cdot[T_{гр}-T(\tau_k,x_0)]\right)^2=$$

$$=\left(P-(a_0\hat{K}_0+a_1\hat{K}_1+\ldots+a_n\hat{K}_n)\cdot H\right)^T\left(P-(a_0\hat{K}_0+a_1\hat{K}_1+\ldots+a_n\hat{K}_n)\cdot H\right)$$

$$S(\sigma)=\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{\Delta x}\big(T(\tau_k,x_1)-T(\tau_k,x_0)\big)-\sum_{i=1}^{p}b_iK_i(\tau_k)\cdot[T^4{}_{гр}-T^4(\tau_k,x_0)]\right)^2=$$

$$=\left(\tilde{P}-(b_0\hat{K}_0+b_1\hat{K}_1+\ldots+b_n\hat{K}_n)\cdot\tilde{H}\right)^T\left(\tilde{P}-(b_0\hat{K}_0+b_1\hat{K}_1+\ldots+b_n\hat{K}_n)\cdot\tilde{H}\right);$$

Задача сводится к нахождению параметров a_i и b_i, которые бы минимизировали функционалы $S(\alpha)$ и $S(\sigma)$. Воспользуемся необходимым условием минимума функционала

$$\frac{\partial S(\alpha')}{\partial a_i}=0,\qquad i=\overline{0,n};$$

$$\frac{\partial S(\sigma')}{\partial b_i}=0,\qquad i=\overline{0,n};$$

Проведя ряд преобразований и вычислив первые производные функционалов по неизвестным компонентам получили 2 системы линейных уравнений соответственно для двух поставленных задач .

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i H^T \widehat{K_i} \widehat{K_0} = H^T A^0 P, \\ \sum_{i=0}^{n} a_i H^T \widehat{K_i} \widehat{K_1} H = H^T A^1 P, \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} a_i H^T \widehat{K_i} \widehat{K_n} H = H^T A^n P; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} b_i \widetilde{H}^T \widehat{K_i} \widehat{K_0} \widetilde{H} = \widetilde{H}^T A^0 P, \\ \sum_{i=0}^{n} b_i \widetilde{H}^T \widehat{K_i} \widehat{K_1} \widetilde{H} = \widetilde{H}^T A^1 P, \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} b_i \widetilde{H}^T \widehat{K_i} \widehat{K_n} \widetilde{H} = \widetilde{H}^T A^n P; \end{cases}$$

Строки матриц линейно независимы, следовательно, детерминант не обращается в ноль и решение системы единственное.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T \widehat{K_0}^2 H & H^T \widehat{K_1} \widehat{K_0} H & \cdots & H^T \widehat{K_n} \widehat{K_0} H \\ H^T \widehat{K_1} \widehat{K_0} H & H^T \widehat{K_1}^2 H & \cdots & H^T \widehat{K_n} \widehat{K_1} H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ H^T \widehat{K_n} \widehat{K_0} H & H^T \widehat{K_1} \widehat{K_n} H & \cdots & H^T \widehat{K_n}^2 H \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H^T \widehat{K_0} P \\ H^T \widehat{K_1} P \\ \vdots \\ H^T \widehat{K_n} P \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_0}^2\widetilde{H} & \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_1}\widehat{K_0}\widetilde{H} & \cdots & \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_n}\widehat{K_0}\widetilde{H} \\ \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_1}\widehat{K_0}\widetilde{H} & \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_1}^2\widetilde{H} & \cdots & \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_n}\widehat{K_1}\widetilde{H} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_n}\widehat{K_0}\widetilde{H} & \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_1}\widehat{K_n}\widetilde{H} & \cdots & \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_n}^2\widetilde{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_0}P \\ \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_1}P \\ \vdots \\ \widetilde{H}^{\mathrm{T}}\widehat{K_n}P \end{pmatrix}$$

Подставив найденные значения a_i и b_i в выражения для $\alpha(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ получаем функцию неизвестного параметра.

Выбор количества базисных функций делается на основе принципа невязки с учетом априорной информации о поведении функции искомого полинома. Слишком мало базисных функций даст гладкое, но слишком неточное решение, а чересчур большое количество базисных функций повлечет за собой внесение погрешности измерений в решение.

Вычислительный эксперимент

Предложенные алгоритмы нахождения функции неизвестного параметра для всех рассмотренных задач идентификации были программно реализованы на языке $C++$ в среде $C++\text{Builder}$.

С целью проверки правильности полученных соотношений и для демонстрации работоспособности метода был проведен ряд вычислительных экспериментов.

1.
Для задачи идентификации параметра конвективного теплообмена была подобрана тестовая функция $\alpha(\tau)$

$$\alpha(\tau) = 30 \cdot \mathrm{Cos}(1.35 \cdot \tau) \cdot \exp(0.5 \cdot \tau) + 60 \cdot \tau \cdot \mathrm{Sin}(1.35 \cdot \tau) \cdot \exp(0.5 \cdot \tau).$$

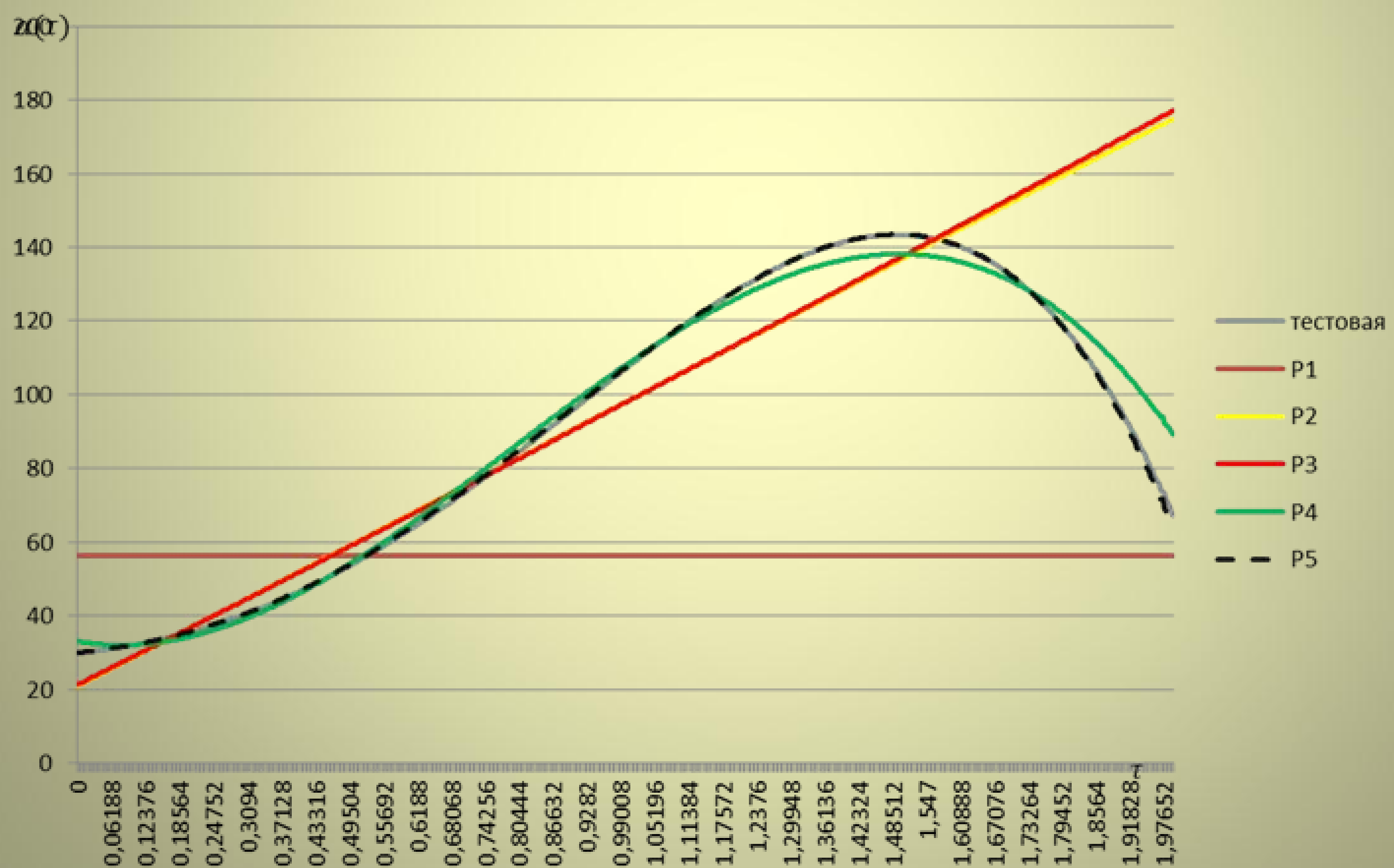
На рассматриваемом промежутке времени $(0 \leq \tau \leq 2)$ нагрева тела данная функция параметра конвективного теплообмена имеет один экстремум и две точки перегиба.
Для тестовой $\alpha(\tau)$ решив задачу Дирихле были насчитаны температуры на поверхности тела, которые будем считать входными данными.
В качестве системы ортогональных функций взяты полиномы Лежандра.

Первые 5 полиномов Лежандра:

$$P0 = 1;\ \ P1 = \tau;\ \ P2 = \frac{1}{2} * (3\tau^2 - 1);\ \ P3 = \frac{1}{2} * (5\tau^3 - 3\tau);\ \ P4 = \frac{1}{8} * (35\tau^4 - 30\tau^2 + 3)$$

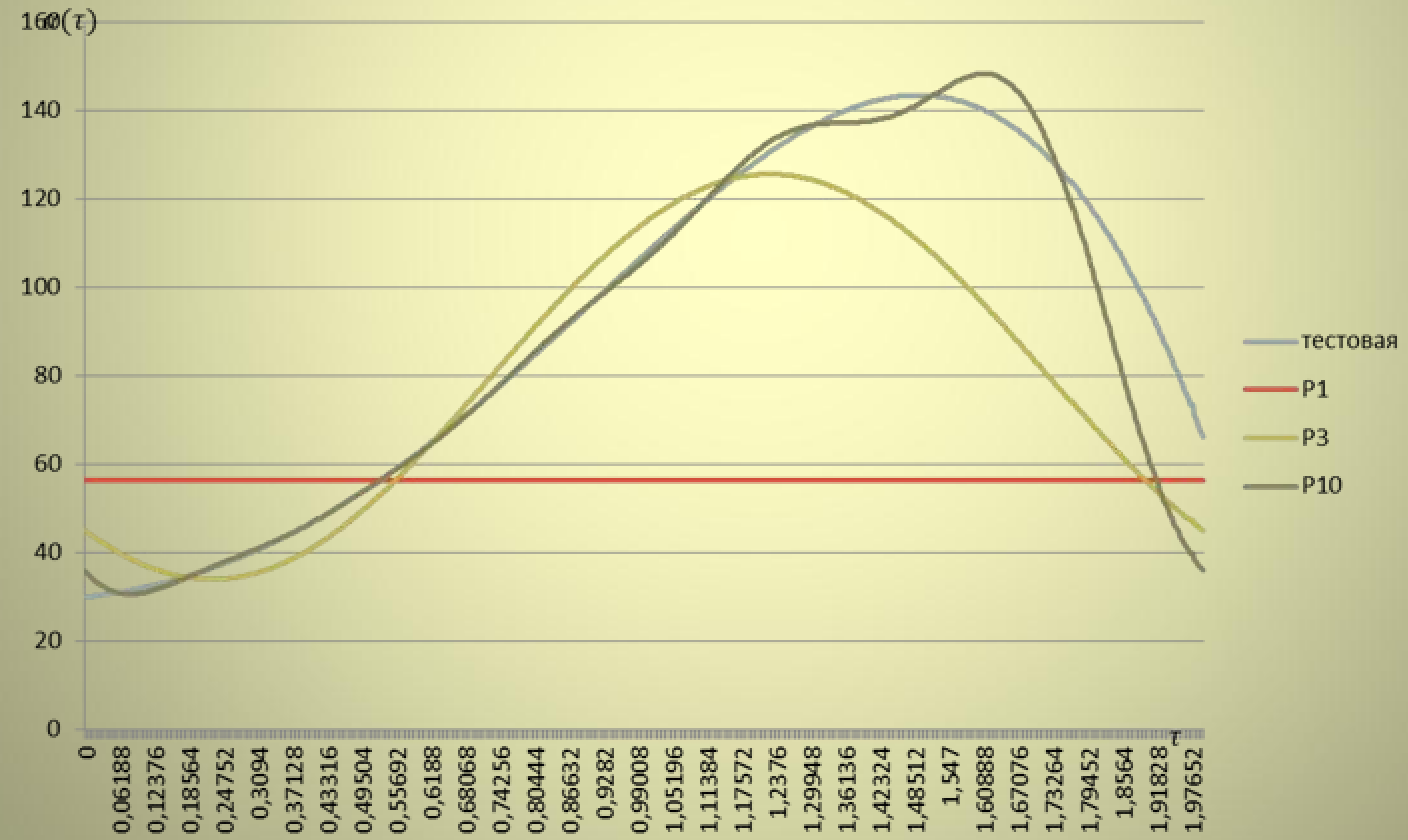
С помощью представленных(см. слайд 10) соотношений были получены аппроксимирующие функции, использующие от 1 до 5 базисных функций.

На рис.1 изображены тестовая и 5 полученных аппроксимирующих функций. Как видно, при использовании 5ти ортогональных функций полученное решение полностью повторяет искомую функцию.



2.

Во втором примере в качестве ортогональных функций взяты тригонометрические функии вида $\sin \pi n \tau, \cos \pi n \tau$. На рисунке 2 представлены тестовая функция и аппроксимирующие ее полученные функции, использующие 1, 3 и 10 ортогональных функций. Легко заметить, что для апроксимации функции неизвестного параметра конвективного теплообмена лучше использовать систему отрогональных полиномов Лежандра.



Выводы

В докладе предложено использовать идею метода наименьших квадратов для идентификации распределенных параметров модели теплофизического процесса. При этом функция неизвестного параметра апроксимируется линейной комбинацией ортогональных функций и проводиться минимизация квадратичного функционала невязки уравнения третьего граничного условия в котором содержится искомый параметр.

Задача сводится к нахождению неизвестных коэффициентов a_i, b_i. Получены соотношения для их вычисления.

Алгоритм программно реализован и проведен ряд вычислительных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. О методах решения некорректных обратных задач// Инженерно-физический журнал. -1983.- т.45, №5, -С.742-752.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матиц.- М.: Наука.- 1966.

3. Бэк Дж., Блакуэлл Б., Ч.Сент-Клэр мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. - М.: Мир.- 1989.

4. Коздоба Л. А., Круковский П.Г .Методы решения обратных задач теплопереноса.- Киев: Наукова думка.-1982.

Спасибо за внимание!

lit.ov@i.ua