ОГРАНИЧЕНИЯ В КОЛЧАНАХ МАТРИЦ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Цюпий С.И.

Межрегиональная академия управления персоналом,

Украина, Киев

Понятие матрицы показателей возникло в теории колец. В прикладных задачах матрицы показателей применяют для планирования многофакторных экспериментов с заданными условиями оптимальности и построения кодов. С каждой матрицей показателей можно связать некоторый граф (колчан) и изучать матрицы показателей методами теории графов. Понятие колчана ввел П. Габриель в связи с классификацией конечномерных алгебр с нулевым квадратом радикала. Колчан приведенной матрицы показателей является простым сильно связным ориентированным графом, но не каждый такой граф является колчаном некоторой матрицы показателей [1]. Ограничениям, которым должны удовлетворять колчаны матриц показателей, и посвящена данная работа.

Важной особенностью работы является широкое использование методов компьютерной алгебры. Автором разработано больше 20 комп'ютерных программ, с помощью которых построено около 2 тысяч примеров матриц показателей до 20 порядка и их колчанов. Гипотезы про свойства колчанов матриц показателей базировались на анализе этих примеров, на них также проверялись полученные результаты.

Пусть $M_n(Z)$ – кольцо квадратных матриц порядка n над кольцом целых чисел.

Матрица $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ из кольца $M_n(Z)$ называется *матрицей показателей*, если выполняются следующие условия:

(i) $\alpha_{ii} = 0$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$;

(ii) $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$ для всех $i, j, k = 1,2,\ldots,n$.

Соотношения (ii) называют кольцевыми неравенствами.

Матрица показателей $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ называется *приведённой*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всех $i \neq j$. Отметим, что при изучении матриц показателей достаточно рассматривать только приведённые матрицы показателей.

Пусть ε – приведённая матрица показателей, E – единичная матрица. Обозначим $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon + E = (\beta_{ij})$, $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, где $\gamma_{ij} = \min_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Граф Q называется *колчаном* матрицы показателей ε, если матрица смежности Q равна $\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$.

Колчан приведенной матрицы показателей является простым сильно связным ориентированным графом, но не каждый такой граф является колчаном некоторой матрицы показателей [1]. Ограничениям, которым должны удовлетворять колчаны матриц показателей, и посвящена данная работа.

Заметим, что одному колчану може соответствовать бесконечное число матриц показателей.

При изучении колчанов будем считать петлю стрелкой, которая соединяет вершину с собой.

Введем понятие ассоциированных вершин в колчане.

Определение. Будем называть вершины u и v $(u \neq v)$ колчана $Q(\varepsilon)$ *ассоциированными с равенством* $\alpha_{uv} + \alpha_{vu} = 1$ (или *ассоциированными*), если для элементов α_{uv} и α_{vu} матрицы показателей $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ это равенство справедливо.

Заметим, что колчан $Q(\varepsilon)$ одновременно в ассоциированных вершинах не имеет петель, каждая вершина колчана, в которой нет петли, ассоциирована с некоторой другой вершиной и может быть ассоциированной с несколькими разными вершинами.

Для произвольной вершины u колчана обозначим через $od\,(u)$ и $id\,(u)$ количество стрелок, которые выходят и, соответственно, входят в вершину u.

Теорема 1. Пусть $Q(\varepsilon)$ – колчан некоторой матрицы показателей ε, у которого вершины u и v ассоциированы. Тогда

$$od\,(u) + od\,(v) \leq n; \quad id\,(u) + id\,(v) \leq n,$$

где n $(n \geq 2)$ – количество вершин колчана $Q(\varepsilon)$.

Следующая теорема дает максимальное количество стрелок колчана с заданным количеством петель.

Теорема 2. Пусть $Q(\varepsilon)$ – колчан некоторой матрицы показателей ε, который имеет n вершин и m петель $(n \geq 3; 0 \leq m \leq n-2)$, K – количество стрелок (включая петли) колчана $Q(\varepsilon)$. Тогда

$$K \leq n^2 - 3n + m + 4. \tag{1}$$

Следующий пример показывает, что при $n=4$ оценка (1) точная.

Пример. Для следующих матриц показателей ε_1, ε_2, ε_3 оценка (1) является равенством:

Матрица показателей ε_i	Матрица смежности $[Q(\varepsilon_i)]$ колчана $Q(\varepsilon_i)$	Число вершин n	Число петель m	Число стрелок K
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	0	8
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	4	1	9
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	4	2	10

Следующая теорема дает количество стрелок, при котором каждая вершина колчана должна иметь петлю.

Теорема 3. Пусть $Q(\varepsilon)$ – колчан некоторой матрицы показателей $\varepsilon = (\alpha_{ij})$, который имеет n вершин и m петель $(n \geq 3; 0 \leq m \leq n)$, K_1 – количество стрелок (не считая петли) колчана $Q(\varepsilon)$. Если

$$K_1 > n^2 - 2n + 2,$$

то петля есть в каждой вершине (т.е. $m = n$ и $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 1$ для всех i, j).

Теорема 4. Обозначим через G $(n \geq 3, 0 \leq m \leq n)$ простой ориентированный граф, который имеет n вершин, петли в m вершинах и у которого из любой вершины есть стрелка в любую другую вершину. Граф G является колчаном некоторой матрицы показателей тогда и только тогда, когда $m = n$.

Ограничения на число простых ориентированных циклов колчана матрицы показателей устанавливает следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $Q(\varepsilon)$ – колчан некоторой матрицы показателей ε, K_s – количество простих ориентированных циклов длины s колчана $Q(\varepsilon)$, K – количество всех ориентированных циклов, включая петли, колчана $Q(\varepsilon)$. Тогда

$$0 \leq K_s \leq P_{s-1} \cdot C_n^s = \frac{n!}{s \cdot (n-s)!}; \qquad 1 \leq K \leq n! \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s \cdot (n-s)!},$$

где n — число вершин колчана $Q(\varepsilon)$.

Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы для исследований в теории представлений и современной структурной теории колец. В дальнейшем планируется продолжение исследования поставленной проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gubareni N.M., Kirichenko V.V. Rings and modules. – Chestochowa, Wyd. Politechn. Chestochowa, 2001. – 306p.